SOLUSI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR BIASA TINGKAT- n DENGAN METODE TEKNIK OPERATOR

Ibnu Maja, S.Si.,M.M
Staf UP.MPK , Politeknik Negeri Sriwijaya Palembang
ibnumaja76@yahoo.co.id

Abstraks

Sistem persamaan linear biasa tingkat n dengan dua persamaan yang terdiri dari dua fungsi tak diketahui dapat diselesaikan dengan langkah-langkah yang diperlukan untuk menentukan solusi penyelesaian persamaan diferensial biasa yaitu menentukan persamaan karakteristik dari dua persamaan tersebut, menggantikan persamaan kedalam teknik operator, menentukan nilai x_p yaitu dengan mengeliminasikan nilai y_p dan sebaliknya, kemudian diselesaikan dengan ketentuan metode teknik operator untuk memperoleh hasil, mensubtitusikan hasil $x(t), x'(t)$ dan $y(t), y'(t)$ kedalam persamaan awal untuk menentukan nilai k sehingga diperoleh hasil akhir yaitu $x = x_h + x_p$ dan $y = y_h + y_p$

Kata Kunci : persamaan diferensial linier biasa , Teknik Operator,

Abstracs

Systems of linear equations outstanding level of n with two equations that consists of two functions of the unknown can be resolved with the steps necessary to determine the solution completion of ordinary differential equations that determine the characteristic equation of the two equations , replacing equation into operator technique , to determine the value x_p that is by eliminate the value y_p and vice versa , then resolved with the provisions of operator technique method to get results $x(t), x'(t)$, and $y(t), y'(t)$ the results mensubtitusikan into the original equation to determine the value of k so that the final result is $x = x_h + x_p$ and $y = y_h + y_p$

Keywords : linear ordinary differential equations , operator technique

I. LATAR BELAKANG

Persamaan diferensial biasa orde pertama dapat disajikan dalam bentuk berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\; atau\; y' = f(x, y)$$

Solusi dari persamaan ini adalah $y(x)$ yang memenuhi persamaan $y'(x) = f(x, y(x))$ disemua titik pada interval domain $[a,b]$. Selanjutnya persamaan diatas merupakan nilai awal bila solusi itu memenuhi nilai awal

$y(a) = y_0$ sehingga persamaan itu dapat digambarkan sebagai :

$y' = f(x,y) \quad a \le x \le b \;\; dan \;\; y(a) = y_0$

Kemudian bila persamaan ini terdiri dari lebih dari satu persamaan yang saling terkait maka dikatagorikan sebagai sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial orde pertama disajikan sebagai berikut:

$$y_0' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$

$$y_1' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$

atau dalam bentuk umum dapat disajikan sebagai :

$$y_i' = f_i(t, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$

i = 1, 2, 3, ..., n dan $a \le t \le b$

dengan nilai awal:

$$y_1(a) = \alpha_1 . y_2(a) = \alpha_2 \ldots\ldots\ldots . y_n(a) = \alpha_n$$

Seluruh bentuk PDB atau sistem PDB dapat ditransformasikan kedalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu dan kelebihan sistem ini adalah mudah ditentukan solusinya dengan metode apapunbaik analitik kualitatif ataupun metode numerik. Dibawah ini diberikan contoh bagaimana sistem PDB sebarang dapat ditransformasikan kedalam sistem PDB orde satu. (Anton & Rorres, 2004)

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial linear yaitu persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannyayaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = g(x)$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah fungsi-fungsi dari variabel bebas x, serta

a. Jika $g(x) = 0$ maka persamaan tersebut homogen

b. Jika $g(x) \neq 0$ maka persamaan tersebut tak homogen

c. Jika seluruh koefisien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta, maka persamaan tersebut dikatakan memiliki koefisien konstan. (Finizio & Ladas, 1988)

II. LANDASAN TEORI

Persamaan diferensial linear tingkat n berbentuk: (Spehley, 1974)

1. $$P_o \frac{d^n x}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dx}{dt} + P_n x = Q$$

   dimana $P_o \neq 0, P_1, P_2, \ldots, P_n \quad Q$ adalah fungsi x atau konstanta.

2. $$P_o \frac{d^n x}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dx}{dt} + P_n x = 0$$

disebut homogen untuk menunjukkan bahwa semua suku-sukunya berderajat sama (pertama) dalam y dan demikian juga turunan-turunannya.

Persamaan Linear Homogen dengan koefisien-koefisien konstanta berbentuk:

1. $$P_o \frac{d^n x}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots + P_{n-1}\frac{dx}{dt} + P_n x = Q$$

dimana $P_o \neq 0, P_1, P_2, \dots, P_n$ adalah konstanta-konstanta.Untuk memudah-kan notasi, tulislah:

$$\frac{dx}{dt} = Dx, \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = D.Dx = D^2x$$

menjadi

$$(P_o\ D^n + P_1\ D^{n-1} + P_2\ D^{n-2} + \dots + P_{n-1}\ D + P_n)\ x = 0$$

maka suatu operator yang bekerja terhadap y dan

$$P_o\ D^n + P_1\ D^{n-1} + P_2\ D^{n-2} + \dots + P_{n-1}\ D + P_n = 0$$

Persamaan Karakteristik

Persamaan:

$$F(D) = (D-m_1)(D-m_2)(D-m_3) \dots (D-m_{n-1})(D-m_n) = 0$$

disebut dengan persamaan karakteristik dan akar-akarnya $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ disebut akar akar karakteristik. (Purcell, 2004)

1. Akar-akar rill yang berbeda $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \dots \neq m_{n-1} \neq m_n$ maka penyelesaiannya adalah
$$y = C_1\ e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$
2. Akar-akar yang berulang $m_1 = m_2 = m_3 \neq \dots \neq m_{n-1} \neq m_n$ maka penyelesaiannya adalah
$$y = C_1\ e^{mx} + C_2 x e^{mx} + C_3 x^2 e^{m_3 x} + \dots + C_n x^{n-1} e^{mx}$$
3. Akar-akar kompleks $a \pm bi$ maka penyelesaiannya adalah:
$$A\ e^{(a+bi)x} + B\ e^{(a-bi)x} = e^{ax}\left(Ae^{bix} + Be^{-bix}\right)$$
$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) = P\ e^{ax} \sin(bx + Q)$$
$$= Pe^{ax} \cos(bx + R)$$

Metode Operator

Integral khusus persamaan Diferensial $F(D)\ y = Q$ dengan Koefisien-koefisien konstan dinyatakan dengan $\frac{1}{F(D)} Q$. Untuk bentuk-bentuk tertentu Q pekerjaan yang dilibatkan dalam menghitung simbol ini dapat dipandang secara sederhana, sebagai berikut :

Persamaan difrensial : (Ayress, 1984)

$$F(D)y = Q \quad \text{maka} \quad y = \frac{1}{F(D)} Q$$

$$y = \frac{1}{D-m_1} \frac{1}{D-m_2} \frac{1}{D-m_2} \dots\dots \frac{1}{D-m_n} Q$$

$$y = e^{m_1 x} \int e^{(m_2 - m_1)x} \int e^{(m_3 - m_2)x} \int \dots \int e^{(m_n - m_{n-1})x} \int Q\ e^{-m_n x}\ (dx)^n$$

Persamaan difrensial:

$F(D)y = Q$ maka $y = \frac{1}{F(D)} Q$

a. jika Q berbentuk e^{ax}

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} = \frac{1}{F(a)} e^{ax} \quad F(a) \neq 0$$

b. jika Q berbentuk $\sin(ax+b)$ atau $\cos(ax+b)$

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b)$$
$$F(-a^2) \neq 0$$

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \cos(ax+b)$$
$$F(-a^2) \neq 0$$

c. jika Q berbentuk x^m

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = \left[a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m\right] x^m$$
$$a_0 \neq 0$$

d. jika Q berbentuk e^{ax} V(x)

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} V(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V(x)$$
$$F(a) \neq 0$$

e. jika Q berbentuk x. V(x)

$$y = \frac{1}{F(D)} x.V(x) = x \frac{1}{F(D)} V(x) - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2} V(x)$$

PEMBAHASAN

Langkah-langkah solusi sistem persamaan diferensial linear Biasa dengan metode Kofaktor adalah: (Goode, 1991)

1) Mengubah sistem persamaan diferensial kedalam teknik operator yaitu $F(D)\, y = Q$
2) Mengeliminasikan persamaan untuk menentukan nilai x_p dan y_p yaitu:
$$x_p = \frac{1}{F(D)} Q \ dan \ y_p = \frac{1}{F(D)} Q$$
3) Menentukan persamaan karakteristik dalam menentukan akar-akar riil dan berbeda, akar-akar yang berulang dan akar-akar kompleks yaitu nilai x_h dan y_h.
4) Mensubtitusikan hasil $x(t), x'(t)$ dan $y(t), y'(t)$ kedalam persamaan untuk menentukan nilai k.
5) Diperoleh solusi umum dari sistem persamaan diferensial linear biasa yaitu : $x = x_h + x_p$ dan $y = y_h + y_p$

Studi Kasus Solusi Sistem Persamaan Linear Biasa dengan Metode Operator

Diberikan **kasus 1** SPD linear biasa sebagai berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = t + 1 \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x + y = 2t - 1 \quad \ldots (2)$$

Solusi umumnya adalah $x(t) = x_h + x_p$ dan $y(t) = y_h + y_p$

Mengubah persamaan kedalam teknik operator :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = t + 1 \quad \Rightarrow \quad D^2x - Dy = t + 1$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x + y = 2t - 1 \Rightarrow$$
$$(D-3)x + (D+1)y = 2t - 1$$

Mencari nilai $x(t)$ dengan menghilangkan nilai $y(t)$ sehingga diperoleh:

$$\left(D^3 + 2D^2 - 3D\right)x_p = t + 4$$

Untuk menentukan nilai $x(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = \left[a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m\right] x^m$$
$$(a_0 \neq 0)$$

$$x_p = \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 3D}(t+4)$$
$$= \frac{1}{D\left(D^2 + 2D - 3\right)}(t+4)$$

$$x_p = \frac{1}{D}\left[-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \ldots\right](t+4)$$
$$= \frac{1}{D}\left(-\frac{1}{3}t - \frac{14}{9}\right)$$

$$x_p = \frac{1}{D}\left(-\frac{1}{3}t - \frac{14}{9}\right) = -\frac{1}{6}t^2 - \frac{14}{9}t$$

Persamaan karakteristik akar-akar yang berulang sehingga diperoleh:

$$D^3 + 2D^2 - 3D = 0 \Rightarrow D\left(D^2 + 2D - 3\right) = 0$$
$$D(D+1)(D-3) = 0 \Rightarrow D = 0, D = -1, D = 3$$
$$x_h = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-3t}$$

Solusi umum untuk nilai $x(t)$ dan $x'(t)$ adalah:

$$x(t) = x_h + x_p = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-3t}$$
$$-\frac{1}{6}t^2 - \frac{14}{9}t$$
$$x'(t) = C_2 e^t - 3C_3 e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{14}{9}$$

Mencari nilai $y(t)$ dengan menghilangkan nilai $x(t)$ sehingga diperoleh:

$$-\left(D^3 + 2D^2 - 3D\right)y_p = -(3t+2)$$

$$y_p = \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 3D}(3t+2)$$
$$= \frac{1}{D\left(D^2 + 2D - 3\right)}(3t+2)$$

$$y_p = \frac{1}{D}\left[-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \ldots\right](3t+2)$$
$$= \frac{1}{D}\left(-t - \frac{4}{3}\right)$$

$$y_p = \frac{1}{D}\left(-t - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}t$$

Persamaan karakteristik akar-akar yang berulang sehingga diperoleh:

$$y_h = K_1 + K_2 e^t + K_3 e^{-3t}$$

Solusi umum untuk nilai $y(t)$ dan $y'(t)$

$$y(t) = y_h + y_p = K_1 + K_2 e^t + K_3 e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}t$$

$$y'(t) = K_2 e^t - 3K_3 e^{-3t} - t - \frac{4}{3}$$

Subtitusikan $x(t)$ dan $y(t)$ kedalam persamaan (1) atau (2) untuk menentukan nilai K_1, K_2, K_3 sehingga diperoleh:

$$K_1 = 3C_1 + \frac{17}{9},\ K_2 = C_2, K_3 = -3C_3$$

Jadi Solusi Umum dari SPD Linear Biasa yang diberikan yaitu:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-3t} - \frac{1}{6}t^2 - \frac{14}{9}t$$

$$y(t) = \left(3C_1 + \frac{17}{9}\right)_1 + C_2 e^t - 3C_3 e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}t$$

Diberikan kasus 2 SPD linear biasa sebagai berikut:

$$2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x - y = 3e^t \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = e^t \qquad \ldots(2)$$

Solusi umumnya adalah $x(t) = x_h + x_p$ dan $y(t) = y_h + y_p$

Mengubah persamaan kedalam teknik operator :

$$2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x - y = 3e^t \Rightarrow$$
$$(2D+1)x + (4D-1)y = 3e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = e^t \Rightarrow$$
$$(D+2)x + (D+2)y = e^t$$

Mencari nilai $x(t)$ dengan menghilangkan nilai $y(t)$ sehingga diperoleh: $(D^2 + D - 2)x_p = -3e^t$

Untuk menentukan nilai $x(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} V(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V(x)$$
$$F(a) \neq 0$$

$$x_p = \frac{1}{D^2 + D - 2}\left(-3e^t\right)$$
$$= \frac{1}{(D-1)(D+2)}\left(-3e^t\right)$$

$$x_p = \frac{1}{(D-1)}\left[\frac{1}{(D+2)}\left(-3e^t\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(D-1)} e^t$$

$$x_p = -e^t \int e^t\, e^{-t} dt = -e^t \int dt = -t\, e^t$$

Persamaan karakteristik akar-akar yang berulang sehingga diperoleh:

$$D^2 + D - 2 = 0 \Rightarrow (D-1)(D+2) = 0$$
$$\Rightarrow D = 1, D = -2$$

$$x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

Solusi umum untuk nilai $x(t)$ dan $x'(t)$ adalah:

$$x(t) = x_h + x_p = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - t\,e^t,$$

$$x'(t) = C_1 e^t - 2C_2 e^{-2t} - e^t - t\,e^t$$

Mencari nilai $y(t)$ dengan menghilangkan nilai $x(t)$ sehingga diperoleh:

$$(D^2 + D - 2)y_p = 3e^t$$

Untuk menentukan nilai $y(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} V(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V(x)$$

$$F(a) \neq 0$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + D - 2}\left(3e^t\right) = \frac{1}{(D-1)(D+2)}\left(3e^t\right)$$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)}\left[\frac{1}{(D+2)}\left(3e^t\right)\right] = \frac{1}{(D-1)} e^t$$

$$y_p = e^t \int e^t\ e^{-t} dt = e^t \int dt = t\,e^t$$

Persamaan karakteristik akar-akar yang berulang sehingga diperoleh:

$$y_h = K_1 e^t + K_2 e^{-2t}$$

Solusi umum untuk nilai $y(t)$ dan $y'(t)$

$$y(t) = y_h + y_p = K_1 e^t{}_1 + K_2 e^{-2t} + t\,e^t$$

$$y'(t) = K_1 e^t - 2K_2 e^{-2t} + e^t + t\,e^t$$

Subtitusikan $x(t)$ dan $y(t)$ kedalam persamaan (1) atau (2) untuk menentukan nilai K_1, K_2 sehingga diperoleh:

$$K_1 = \frac{1-3C_1}{3},\quad K_2 = -\frac{1}{3} C_2$$

Jadi Solusi Umum dari SPD Linear Biasa yang diberikan yaitu:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - t\,e^t$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{3} - C_1\right) e^t - \frac{1}{3} C_2 e^{-2t} + t\,e^t$$

Diberikan kasus 3 SPD linear biasa sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 0 \qquad \ldots(2)$$

Solusi umumnya adalah:

$x(t) = x_h + x_p$ dan $y(t) = y_h + y_p$

Mengubah persamaan kedalam teknik operator :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t \quad \Rightarrow$$

$$(D)x + (D+2)y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(D-1)x + (D-1)y = 0$$

Mencari nilai $x(t)$ dengan menghilangkan nilai $y(t)$ sehingga diperoleh:

$$(-2D+2)\, x_p = \cos t - \sin t$$

Untuk menentukan nilai $x(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b)$$

$$= \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b) \quad F(-a^2) \neq 0$$

$$x_p = \frac{1}{-2D+2}(\cos t - \sin t)$$

$$= \frac{1}{(-2D+2)} \frac{(-2D-2)}{(-2D-2)}(\cos t - \sin t)$$

$$x_p = \frac{1}{(4D^2-4)}\left[(-2D-2)(\cos t - \sin t)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sin t$$

Persamaan karakteristik akar-akar yang berulang sehingga diperoleh:

$$-2D+2=0 \Rightarrow -2D=-2 \Rightarrow D=1$$

$x_h = C_1 e^t$

Solusi umum untuk nilai $x(t)$ dan $x'(t)$ adalah:

$$x(t) = x_h + x_p = C_1 e^t - \frac{1}{2}\sin t,$$

$$x'(t) = C_1 e^t - \frac{1}{2}\cos t$$

Mencari nilai $y(t)$ dengan menghilangkan nilai $x(t)$ sehingga diperoleh:

$$(2D-2)\, y_p = \cos t - \sin t$$

Untuk menentukan nilai $y(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y_p = \frac{1}{2D-2}(\cos t - \sin t)$$
$$= \frac{1}{(2D-2)}\frac{(2D+2)}{(2D+2)}(\cos t - \sin t)$$

$$y_p = \frac{1}{(4D^2-4)}[(2D+2)(\cos t - \sin t)]$$
$$= \frac{1}{2}\sin t$$

Persamaan karakteristik akar-akar yang berulang sehingga diperoleh: $y_h = K_1 e^t$

Solusi umum untuk nilai $y(t)$ dan $y'(t)$

$$y(t) = y_h + y_p = K_1 e^t + \frac{1}{2}\sin t$$

$$y'(t) = K_1 e^t + \frac{1}{2}\cos t$$

Subtitusikan $x(t)$ dan $y(t)$ kedalam persamaan (1) atau (2) untuk menentukan nilai K_1 sehingga diperoleh: $K_1 = -\frac{1}{3}C_1$,

Jadi Solusi Umum dari SPD Linear Biasa yang diberikan yaitu: (Spehley, 1974)

$$x(t) = C_1 e^t - \frac{1}{2}\sin t$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}\sin t$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Langkah-langkah solusi sistem persamaan diferensial linear Biasa dengan metode Kofaktor adalah:

1. Mengubah sistem persamaan diferensial kedalam teknik operator yaitu $F(D)\, y = Q$
2. Mengeliminasikan persamaan untuk menentukan nilai x_p dan y_p yaitu $x_p = \frac{1}{F(D)}Q$, $y_p = \frac{1}{F(D)}Q$
3. Menentukan persamaan karakteristik dalam menentukan akar-akar riil dan berbeda, akar-akar yang berulang dan akar-akar kompleks yaitu nilai x_h dan y_h.
4. Mensubtitusikan hasil $x(t), x'(t)$ dan $y(t), y'(t)$ kedalam persamaan untuk menentukan nilai k.

5. Diperoleh solusi umum dari sistem persamaan diferensial linear biasa yaitu : $x = x_h + x_p$ dan $y = y_h + y_p$

Bagi pembaca yang tertarik dan untuk memperdalam disarankan membahas mengenai metode ini, dapat mengkaji tentang solusi sistem persamaan diferensial linear biasa dengan orde yang lebih tinggi dan dengan metode yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Ayress Frank, JR, Ph,D, 1984. Persamaan Diferensial, Seri Buku Schaum, Terjemahan Dr. Lily Ratna, Jakarta: Erlangga.

Anton, H dan C, Rorres, 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Terjemahan oleh R. Indriasari dan I. Harman. Jakarta: Erlangga.

Finizio, N dan G, Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Terjemahan oleh Dra. Widiarti. Santoso. Jakarta: Eerlangga.

Goode, S. W. 1991. *An Introduction to Differential Equations and Linear Algebra.* New York: Prentice-Hall International, Inc.

Purcell, E, J, D. Varberg, dan S, E, Rigdon. 2004. *Kalkulus Jilid 2 (Edisi Kedelapan)* Jakarta: Erlangga.

Shepley L. Ross. 1974. *Differentiaal Equations.* New York: Prentice-Hall International, Inc.